Problème

Arithmétique et probabilités

Notations

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{E}_n$ l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$, $\mathcal{P}_n$ l'ensemble $\mathcal{P} \cap \mathcal{E}_n$ et $\Pi(n)$ le cardinal de $\mathcal{P}_n$.

Si k est dans $\mathbb{N}^*$, soient $d(k)$ le nombre de diviseurs de k dans $\mathbb{N}^*$, $\omega(k)$ le nombre de diviseurs premiers de k. $\Omega(k)$ le nombre de diviseurs de k qui sont des nombres primaires, c'est-à-dire de la forme $p^i, p \in \mathcal{P}, i \in \mathbb{N}^*$..

Si k est dans $\mathbb{N}^*$ et p dans $\mathcal{P}$, on note $v_p(k)$ la p-valuation de k, c'est-à-dire l'exposant de p dans la décomposition de k en facteurs premiers.

Nous adopterons un point de vue probabiliste. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on munit donc $\mathcal{E}_n$ de la probabilité uniforme. Si $j \in \mathcal{E}_n$, on note $X_{j,n}$ la variable de Bernoulli définie sur $\mathcal{E}_n$ par

$$X_{j,n}^{(\omega)} = 1_{j|\omega}$$

On note X_n la variable aléatoire « nombre de diviseurs », Y_n la variable aléatoire « nombre de diviseurs premiers », Z_n la variable aléatoire « nombre de diviseurs primaires ».

But et organisation du problème

On se propose de calculer les moyennes de d, ω et Ω sur $\mathcal{E}_n$; d'estimer asymptotiquement ces moyennes lorsque n tend vers $+\infty$ et d'étudier dans quelle mesure ces moyennes sont significatives. La partie I est consacrée au calcul et à l'estimation des moyennes. La partie II étudie la dispersion des variables aléatoires Les résultats des parties II.B et II.C ont été découverts par Hardy et Ramanujan. La démonstration probabiliste proposée ici est due à Turan.

I. Moyennes des fonctions d, ω et Ω

A. Majoration de Tchebychev

1. Soit m dans $\mathbb{N}^*$.
   a) Montrer :
$$\binom{2m+1}{m} \leq 4^m.$$
   Indication. On pourra appliquer la formule du binôme à $(1+1)^{2m+1}$.
   b) Montrer que :
$$\prod_{p \in \mathcal{P}_{2m-1} \setminus \mathcal{P}_{m+1}} p \quad \text{divise} \quad \binom{2m+1}{m}.$$

2. Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'inégalité :

$$\prod_{p\in\mathcal{P}_n} p \leq 4^n.$$

Indication. Raisonner par récurrence sur n.

3. a) Soient n dans $\mathbb{N}^*$, m dans $\mathcal{E}_n$, avec $2 \leq m, 4 \leq n$. Montrer :

$$\Pi(n) \leq \frac{n \ln 4}{\ln m} + \Pi(m) \cdot$$

b) Montrer finalement :

$$\Pi(n) \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{n}{\ln n}\right).$$

B. Les variables aléatoires $X_{i,n}$; moyenne de d

Soient n dans $\mathbb{N}^*$, i dans $\mathcal{E}_n$.

4. Pour i dans $\mathcal{E}_n$, reconnaître la loi de la variable aléatoire $X_{i,n}$, puis déterminer l'espérance et la variance de cette variable aléatoire.

5. a) Relier les fonctions d, ω, Ω et les variables aléatoires X_n, Y_n, Z_n. Exprimer $\Omega(n)$ à l'aide des valuations $v_p(n)$ pour p dans $\mathcal{P}$.

b) Écrire les variables aléatoires X_n, Y_n, Z_n comme sommes de variables aléatoires de la forme $X_{i,n}$.

6. a) Montrer :

$$E(X_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} d(k) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\lfloor\frac{n}{j}\rfloor.$$

b) Montrer :

$$E(X_n) = \ln n + O(1).$$

C. Encadrement de d à l'aide de ω et Ω

7. Soit k dans $\mathbb{N}^*$.

a) Exprimer $d(k)$ à l'aide de la décomposition de k en facteurs premiers.

b) Montrer :

$$2^{\omega(k)} \leq d(k) \leq 2^{\Omega(k)}.$$

D. Formule de Legendre

Soient n dans $\mathbb{N}^*$ et p dans $\mathcal{P}$.

8. Pour ℓ dans $\mathbb{N}^*$, déterminer le nombre d'éléments de E_n dont la p-valuation est égale à ℓ et en déduire :

$$v_p(n!) = \sum_{\ell\geq 1}\lfloor\frac{n}{p^\ell}\rfloor.$$

9. Montrer :

$$\frac{n}{p} - 1 \leq v_p(n!) \leq \frac{n}{p} + \frac{n}{p(p-1)}.$$

E. Estimations de Mertens

Pour n dans $\mathbb{N}^*$, soient

$$S_n = \sum_{p \in \mathcal{P}_n} \frac{\ln p}{p} \qquad \text{et} \qquad T_n = \sum_{p \in \mathcal{P}_n} \frac{1}{p}.$$

10. En utilisant l'estimation : $\ln(n!) = n \ln n + O(n)$ et les questions 3 et 9, montrer :

$$S_n = \ln n + O(1).$$

11. Justifier l'existence d'un réel ℓ tel que :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k} = \ln(\ln n) + \ell + o(1).$$

12. a) Si n est un entier supérieur ou égal à 2, montrer :

$$T_n = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{\ln k} - \frac{1}{\ln(k+1)} \right) S_k + \frac{S_n}{\ln(n+1)}.$$

b) Montrer :

$$T_n = \ln(\ln n) + O(1).$$

F. Moyennes de ω et Ω

13. a) Montrer, pour n dans $\mathbb{N}^*$:

$$E(Y_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \omega(k) = \frac{1}{n} \sum_{p \in \mathcal{P}_n} \lfloor \frac{n}{p} \rfloor, \qquad E(Z_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \Omega(k) = \frac{1}{n} \sum_{p \in \mathcal{P}_n} v_p(n!).$$

b) Montrer :

$$E(Y_n) = \ln(\ln n) + O(1), \qquad E(Z_n) = \ln(\ln n) + O(1).$$

II. Dispersion des fonctions d, ω et Ω

A. Dispersion de ω

14. Soit n dans $\mathbb{N}^*$

a) Montrer :

$$\sum_{p \in \mathcal{P}_n} V(X_{p,n}) = \ln(\ln n) + O(1).$$

Soient p et q deux éléments distincts de $\mathcal{P}_n$.

b) Montrer :

$$\mathrm{Cov}\,(X_{p,n}, X_{q,n}) = \frac{1}{n}\left(\left[\frac{n}{pq}\right] - \frac{1}{n}\left[\frac{n}{p}\right]\left[\frac{n}{q}\right]\right).$$

c) Montrer :

$$\mathrm{Cov}\,(X_{p,n}, X_{q,n}) \leq \frac{1}{n}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right).$$

15. Montrer :

$$V(Y_n) = \ln(\ln n) + O(1).$$

16. Soit ϵ dans $\mathbb{R}^{+*}$. En utilisant l'inégalité de Tchebychev, montrer que le nombre d'éléments k de $\mathcal{E}_n$ tels que :

$$|\omega(k) - \ln(\ln n)| \geq \epsilon \ln(\ln n)$$

est

$$O\left(\frac{n}{\ln(\ln n)}\right).$$

17. Soit ϵ dans $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer que le nombre d'éléments k de $\mathcal{E}_n$ tels que :

$$|\omega(k) - \ln(\ln k)| \geq \epsilon \ln(\ln k)$$

est

$$O\left(\frac{n}{\ln(\ln n)}\right).$$

B. Dispersion de Ω et d

18. Soit ϵ dans $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer que le nombre d'éléments k de $\mathcal{E}_n$ tels que :

$$|\Omega(k) - \ln(\ln n)| \geq \epsilon \ln(\ln n)$$

est

$$O\left(\frac{n}{\ln(\ln n)}\right).$$

Indication. Utiliser l'inégalité $\omega \leq \Omega$ et la question **14.b)**.

19. Soit ϵ dans $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer que le nombre d'éléments k de $\mathcal{E}_n$ tels que :

$$d(k) < (\ln n)^{\ln 2 - \epsilon} \qquad \text{ou} \qquad d(k) > (\ln n)^{\ln 2 + \epsilon}$$

est

$$O\left(\frac{n}{\ln(\ln n)}\right)$$

donc $o(n)$.

Que peut-on déduire de ce résultat et de celui établi en **6.b)** ?

C. Une application aux tables de multiplication

20. Si n est dans $\mathbb{N}^*$, soit M_n le nombre d'entiers pouvant s'écrire comme produit de deux éléments de $\mathcal{E}_n$.

Donner une estimation de M_n lorsque n tend vers $+\infty$ montrant en particulier que :

$$M_n = o\left(n^2\right).$$

I Moyennes des fonctions d, ω et Ω

A · Majorations de Tchebychev

1-a) Avec la formule du binôme :

$$2\cdot 4^{2m} = (1+1)^{2m+1} = \sum_{k=0}^{2m+1}\binom{2m+1}{k} \geq \binom{2m+1}{m+1}+\binom{2m+1}{m} = 2\cdot\binom{2m+1}{m} \quad \square$$

b) Soit $p\in\mathcal{P}_{2m+1}\setminus\mathcal{P}_{m+1}$; visiblement, $p \mid (m!)^2\binom{2m+1}{m}(m+1) = (2m+1)!$, mais $p\geq m+2$ donc $p\wedge(m+1)! = 1$, selon Gauss, p divise $\binom{2m+1}{m}$ $\square$

2 : Le résultat demandé se vérifie directement pour $n=1,2,3$. Soit $m\in\mathbb{N}^*$, $m\geq 2$. Supposons : $\prod_{p\in\mathcal{P}_m} p \leq 4^m$, du fait que $\prod_{p\in\mathcal{P}_{2m+1}\setminus\mathcal{P}_{m+1}} p \leq\binom{2m+1}{m}\leq 4^{m+1}$, il vient par produit $\prod_{p\in\mathcal{P}_{2m+1}} p \leq 4^{2m+1}$; $2m+2$ étant pair : $\prod_{p\in\mathcal{P}_{2m+2}} p = \prod_{p\in\mathcal{P}_{2m+1}} p$, l'inégalité demandée est donc vérifiée pour $2m+2$.

Une récurrence forte facile donne la conclusion $\square$

3·a) D'après ce qui précède,

$$n\log 4 = \log 4^n \geq \log\Big(\prod_{p\in\mathcal{P}_n} p\Big) \geq \sum_{p\in\mathcal{P}_n\setminus\mathcal{P}_m}\log p \geq \log m\,(\pi(n)-\pi(m)),$$

d'où l'inégalité demandée.

b) Posons, pour $q\geq 1$: $u_q = \pi(2^q)$ ($u_1 = 1$, $u_2 = 2$ ($\Rightarrow u_q = q$))

l'inégalité précédente appliquée à $m = 2^q$, $n = 2^{q+1}$ fournit :

$$u_{q+1} \leq \frac{(2\ln 2)\,2^{q+1}}{(q+1)\cancel{\ln 2}} + u_q$$

d'où $u_{q+1} - u_q \leq 4\cdot\frac{2^q}{q}$, et $u_{q+1} - 1 \leq 4\sum_{k=1}^{q}\frac{2^k}{k}$. Or

$\frac{2^{q+1}}{q+1} - \frac{2^q}{q} = \frac{2^q}{q(q+1)} + \frac{2^q}{q+1} \sim \frac{2^q}{q}$, par sommation (correct !) : $\sum_{k=1}^{q}\frac{2^k}{k} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2^{q+1}}{q+1}$

et donc : $u_{q+1} = O\Big(\frac{\cancel{\log}\,2^{q+1}}{\log 2^{q+1}}\Big)$. Enfin, si $2^q\leq n < 2^{q+1}$ il vient : $\log n \sim \log 2^q$, $\pi(n)\leq\pi(2^{q+1})$ AQT

B. Les variables aléatoires $X_{j,n}$; moyenne de d.

4. Bien comprendre : $X_{j,n}(\omega) = 0$ si $j \nmid \omega$, $X_{j,n}(\omega) = 1$ si $j \mid \omega$, $\omega \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, $X_{j,n}$ suit une loi binomiale de paramètre α_j où $\alpha_j = \left[\frac{n}{j}\right]/n$, sachant que le nombre de multiples de j dans $\mathcal{E}_n$ est exactement $\left[\frac{n}{j}\right]$. Son espérance est donc $E(X_{j,n}) = \alpha_j = \left[\frac{n}{j}\right]/n$ et sa variance $\alpha_j(1-\alpha_j)$.

5. a) L'interprétation de $X_{j,n}$ et les définitions donnent clairement :
$$X_n = \sum_{j=1}^{n} X_{j,n} \;;\quad Y_n = \sum_{p \in \mathcal{P}_n} X_{p,n} \;;\quad Z = \sum_{\substack{i \geq 1,\, p \in \mathcal{P} \\ p^i \leq n}} X_{p^i,n}$$

6. a) D'une part, $E(X_n) = \sum_{j=1}^{n} E(X_{j,n}) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{n}{j}\right]$.
D'autre part, $E(X_n) = \sum_{k=1}^{n} X(k) P(X=k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} d(k)$.

b) On écrit : $\left[\frac{n}{j}\right] = \frac{n}{j} + \varepsilon_{n,j}$ où $|\varepsilon_{n,j}| \leq 1$, d'où
$$E(X_n) = \sum_{j=1}^{n} j^{-1} + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_{n,j} = \ln n + \gamma + o(1) + O(1)$$
$$= \ln n + O(1).$$

C. Encadrement de d à l'aide de ω et Ω

7. a) Écrivons $k = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$, où les p_i sont distincts, dans $\mathcal{P}$, et les α_i sont dans $\mathbb{N}^*$. Un diviseur de k s'écrit, et de façon unique, sous la forme $p_1^{\beta_1} \cdots p_r^{\beta_r}$, $\beta_i \in \{0, \dots, \alpha_i\}$, $i = 1 \dots r$.
Ceci nous donne exactement $(\alpha_1+1)\cdots(\alpha_r+1)$ diviseurs.
Avec les valuations, nous obtenons : $d(k) = \prod_{p \in \mathcal{P}} (v_p(k)+1)$

b) Gardons les notations du a), donc $r = \omega(k)$, il vient $\prod_{i=1}^{r}(\alpha_i+1) \geq 2^r = 2^{\omega(k)}$. Il y a de plus $\sum_{i=1}^{r}\alpha_i$ diviseurs primaires de k, et comme $1+\alpha_i \leq 2^{\alpha_i}$, $i = 1 \dots r$, nous obtenons :
$$d(k) = \prod_{i=1}^{r}(\alpha_i+1) \leq 2^{\sum \alpha_i} = 2^{\Omega(k)},$$

D. Formule de Legendre

$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{n} v_p(k) = \sum_{\ell=1}^{\left[\frac{\ln n}{\ln p}\right]} \left(\ell\left[\frac{n}{p^\ell}\right] - (\ell-1)\left[\frac{n}{p^{\ell+1}}\right]\right) = \sum_{\ell\geq 1}\left[\frac{n}{p^\ell}\right]$$

9. Fastoche : $\frac{n}{p} - 1 \leq \left[\frac{n}{p}\right] \leq v_p(n!) \leq \frac{n}{p} + n\sum_{\ell=2}^{+\infty}\frac{1}{p^\ell} = \frac{n}{p} + \frac{n}{p(p-1)}$

E. Estimations de Mertens.

10. La décomposition de $n!$ en facteurs premiers s'écrit aussi :
$n! = \prod_{p\in\mathcal{P}_n} p^{v_p(n!)}$ d'où $\ln n! = \sum_{p\in\mathcal{P}_n} v_p(n!)\ln p$, et avec l'encadrement du 9 :

$$\sum_{p\in\mathcal{P}_n}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{n}\right)\ln p \leq \frac{\ln n!}{n} \leq \sum_{p\in\mathcal{P}_n}\frac{\ln p}{p} + \sum_{p=2}^{+\infty}\frac{\ln p}{p(p-1)}$$

soit :
$$S_n - \frac{1}{n}\ln\prod_{p\in\mathcal{P}_n} p \leq \ln n + O\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n + Cste$$

Or : $\frac{1}{n}\ln\prod_{p\in\mathcal{P}_n} p \leq \frac{1}{n}\ln 4^n \leq \ln 4$, et donc :
$$S_n - Cste' \leq \ln n + O(1) \leq S_n + Cste \quad \square$$

11. Soit $f : \left(\begin{array}{l}[2,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{x\ln x}\end{array}\right)$; $f'(x) = -\frac{1+\ln x}{x^2\ln^2 x} < 0$, donc f décroît vers 0 et la méthode usuelle (Refaire !) de comparaison série-intégrale donne :
$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k} = \ln(\ln n) + \ell + o(1)$$

12-a) Partons de l'expression donnée par l'énoncé :
$$\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{\ln k} - \frac{1}{\ln(k+1)}\right)S_k = \sum_{k=2}^{n}\frac{S_k}{\ln k} - \sum_{k=2}^{n}\frac{S_k}{\ln(k+1)} = \sum_{k=2}^{n}\frac{S_k}{\ln k} - \sum_{k=3}^{n+1}\frac{S_{k-1}}{\ln k}$$
$$= \sum_{k=3}^{n}\frac{1}{\ln k}(S_k - S_{k-1}) + \frac{\ln 2}{2} - \frac{S_n}{\ln(n+1)}$$; or $S_k = S_{k-1}$ sauf si k est premier, auquel cas $S_p - S_{p-1} = \frac{\ln p}{p}$. Il reste donc :
$$\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{\ln k} - \frac{1}{\ln(k+1)}\right)S_k = \sum_{p\in\mathcal{P}_n}\frac{\cancel{\ln p}}{\cancel{\ln p}\cdot p} - \frac{S_n}{\ln(n+1)} = T_n - \frac{S_n}{\ln(n+1)} \quad \square$$

b) Soit $k\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$, il vient : $\frac{1}{\ln k} - \frac{1}{\ln(k+1)} = \frac{\cancel{\ln k} + \ln(1+\frac{1}{k}) - \cancel{\ln k}}{(\ln k)\ln(k+1)}$
$= \frac{1}{k(\ln k)^2} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)$, donc $\left(\frac{1}{\ln k} - \frac{1}{\ln(k+1)}\right)S_k = \frac{1}{k\ln k} + \varepsilon_k$ où

$\sum |\varepsilon_k|$ converge. Comme nous sommons une série divergente à termes positifs il s'ensuit :

$$T_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k} + O(1) = \ln(\ln n) + O(1)$$

11.

I. Moyennes de ω et Ω

13-a) Rappelons que : $Y_n = \sum_{p \in \mathcal{P}_n} X_{p,n}$; $Z_n = \sum_{\substack{p \in \mathcal{P}_n \\ i \geq 1, p^i \leq n}} X_{p^i,n}$

De là, il résulte que :

i) $E(Y_n) = \sum_{p \in \mathcal{P}_n} E(X_{p,n}) = \sum_{p \in \mathcal{P}_n} \frac{1}{n}\left[\frac{n}{p}\right]$ et aussi

$$E(Y_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} Y_n(k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\omega(k)}{n},$$

ii) $E(Z_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \Omega(k) = \frac{1}{n} \sum_{\substack{p^i \leq n \\ p \in \mathcal{P}_n}} \left[\frac{n}{p^i}\right] = \frac{1}{n} \sum_{p \in \mathcal{P}_n} v_p(n!)$.

Legendre

b) i) Du fait que, pour tout $p \in \mathcal{P}_n$: $\frac{n}{p} - 1 \leq \left[\frac{n}{p}\right] \leq \frac{n}{p}$

il résulte : $\sum_{p \in \mathcal{P}_n} \frac{1}{p} - 1 \leq E(Y_n) \leq \sum_{p \in \mathcal{P}_n} \frac{1}{p}$ et donc :

$$T_n - 1 \leq E(Y_n) \leq T_n.$$

Or : $T_n = \ln(\ln n) + O(1)$, soit : $E(Y_n) = \ln(\ln n) + O(1)$ □

12-b)

ii) On utilise cette fois l'encadrement du 9 : $\frac{n}{p} - 1 \leq v_p(n!) \leq \frac{n}{p} + \frac{n}{p(p-1)}$

ce qui donne : $T_n - 1 \leq E(Z_n) \leq T_n + \sum_{p \geq 2} \frac{1}{p(p-1)}$

à nouveau : $E(Z_n) = \ln(\ln n) + O(1)$. □

II - Dispersion des fonctions d, ω et Ω.

14-a) Avec les calculs du 4 :

$$\sum_{p \in \mathcal{P}_n} V(X_{p,n}) = \frac{1}{n^2} \sum_{p \in \mathcal{P}_n} \left[\frac{n}{p}\right]\left(n - \left[\frac{n}{p}\right]\right) = \frac{1}{n} \sum_{p \in \mathcal{P}_n} \left[\frac{n}{p}\right] - \frac{1}{n^2} \sum_{p \in \mathcal{P}_n} \left[\frac{n}{p}\right]^2$$

La première somme s'écrit en $\ln(\ln n) + O(1)$, et la deuxième est bornée par $\sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p^2}$ (convergente), d'où le résultat.

b). Rappelons que : $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$; or $X_{p,n}X_{q,n}(\omega)=1$ ssi $X_{p,n}(\omega)=1$ et $X_{q,n}(\omega)=1$ càd : $p|\omega$ et $q|\omega$. Comme p et q sont premiers et distincts, cela revient à dire que $pq|\omega$.

La seule autre valeur prise par $X_{p,n}X_{q,n}$ est 0 : on a donc

$X_{p,n}X_{q,n} = X_{pq,n}$; finalement :

$$Cov(X_{p,n}, X_{q,n}) = \frac{1}{n}\left(\left[\frac{n}{pq}\right] - \frac{1}{n}\left[\frac{n}{p}\right]\left[\frac{n}{q}\right]\right)$$

c) $$\left[\frac{n}{pq}\right] \leq \frac{n}{pq} \leq \frac{n}{pq} + \frac{1}{n} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{n}\left(\frac{n}{p}-1\right)\left(\frac{n}{q}-1\right)$$
$$\leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{n}\left[\frac{n}{p}\right]\left[\frac{n}{q}\right]$$

d'où l'inégalité demandée compte-tenu de b).

15. Rassemblons les résultats obtenus :

$$V(Y_n) = \underbrace{\sum_{p\in \mathcal{P}_n} V(X_{p,n})}_{= \ln(\ln n) + O(1)} + \underbrace{\sum_{\substack{p\neq q \\ p,q\in \mathcal{P}_n}} cov(X_{p,n}, X_{q,n})}_{C_n}$$

et, avec 14) on a : $$C_n \leq \sum_{\substack{p\neq q \\ p,q\in \mathcal{P}_n}} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right) \leq \frac{1}{n}\pi(n)T_n$$

et $$\frac{1}{n}\pi(n)T_n = \frac{1}{n}O\left(\frac{n}{\ln n}\right)\ln(\ln n) = o(1)$$

Finalement : $V(Y_n) \leq \ln(\ln n) + O(1)$. (*) à suivre.

16. On observe tout d'abord que de $E(Y_n) = \ln\ln n + O(1)$ on déduit :

$$d_n \overset{not}{=} \frac{1}{n}\operatorname{card}\{k\in E_n \mid |\omega(k) - \ln\ln(n)| \geq \varepsilon\ln\ln n\} = P(|Y_n - E(Y_n) - O(1)| \geq \varepsilon\ln\ln n)$$

Or : $|Y_n - (E(Y_n) + O(1))| \geq \varepsilon\ln(\ln n)$ entraîne :

$|Y_n - E(Y_n)| \geq \varepsilon\ln\ln n - |O(1)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\ln\ln n$ pour n assez grand

De là : $$d_n \leq P\left(|Y_n - E(Y_n)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\ln\ln n\right) \leq \frac{V(Y_n)}{(\varepsilon/2)^2(\ln\ln n)^2}$$

via Tchebychev, comme $V(Y_n) \leq 2(\ln\ln n)$ pour n grand :

$$d_n \leq \frac{4}{\varepsilon^2}\cdot\frac{1}{\ln\ln n}$$ or $$|\{k\in E_n \mid |\omega(k) - \ln\ln n| \geq \varepsilon\ln\ln n\}| \leq \left(\frac{4}{\varepsilon^2}\right)\frac{n}{\ln\ln n}$$ OK

17. Pour $k \in [\![1, \sqrt{n}]\!]$, $|\ln \ln k - \ln\ln n| \leq \ln 2$

Donc, asymptotiquement :

$$|\{k \leq n \mid |\omega(k) - \ln\ln k| \geq \varepsilon \ln\ln k\}|$$

$$= |\{k \leq n \mid |\omega(k) - \ln\ln n| \geq \frac{\varepsilon}{2} \ln\ln n\}| + O(\sqrt{n})$$

$$= O\left(\frac{n}{\ln\ln n}\right).$$

18. Reprenant la méthode précédente, il suffit de majorer $V(Z_n)$, or on a vu que

$$Z_n = X_{n,p} + \sum_{\substack{i \geq 2 \\ p^i \leq n}} X_{p^i,n} \quad , \quad V(X_{p^i,n}) \leq \frac{1}{n^2} \frac{n}{p^i}$$

$$\sum_{\substack{i \geq 2 \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{1}{p^i} \leq \sum_{m \geq 2} \frac{1}{m^2} \leq \frac{\pi^2}{6} \quad , \quad \mathrm{cov}(X_{p^i,n}, X_{q^j,n}) \leq \frac{1}{n}\left(\frac{1}{p^i} + \frac{1}{q^j}\right)$$

d'où $\displaystyle\sum_{\substack{i,j \geq 2 \\ p^i \leq n,\, p^j \leq n}} \mathrm{cov}(X_{p^i,n}, X_{q^j,n}) \leq \frac{1}{n} \sum_{\substack{p^i \leq n,\, i \geq 2 \\ q^j \leq n,\, j \geq 2}} \left(\frac{1}{p^i} + \frac{1}{q^j}\right)$ (*)

or $p^i \leq n \Rightarrow i \leq \frac{\ln n}{\ln 2}$ et $p \leq n$, la somme de droite est donc majorée par $\displaystyle\left(\frac{\ln n}{\ln 2}\right)^2 \sum_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ i \geq 2}} \frac{1}{p^i} \leq 4 \frac{\pi^2}{6} \ln^2 n$

et de ce fait : $V(Z_n) \leq \ln\ln n + O(1) + O\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right)$

la suite en suit.

19. Du fait que $2^{\omega(k)} \leq d(k) \leq 2^{\Omega(k)}$ (7-c), il vient

$$\begin{cases} d(k) \leq 2^{\ln\ln n + \varepsilon \ln\ln n} & \text{dès que } \Omega(k) \leq (\ln\ln n)(1+\varepsilon) \\ d(k) \geq 2^{\ln\ln n + \varepsilon \ln\ln n} & \quad = \quad \omega(k) \geq (\ln\ln n)(1-\varepsilon) \end{cases}$$

Or $2^{(\ln(\ln n))(1 \pm \varepsilon)} = \left((\ln n)^{\ln 2}\right)^{(1 \pm \varepsilon)}$, le résultat vient donc de 18 et 19.

20. Soit $\varepsilon = \frac{1}{2}$; il existe une constante $C \geq 0$ telle que asymptotiquement, $\underbrace{\mathrm{card}\{k \in \mathcal{E}_n \mid |\Omega(k) - \mathrm{Log}\,\mathrm{Log}\, n| \geq \frac{1}{2} \mathrm{Log}\,\mathrm{Log}\, n\}}$ Ensemble noté A

(*) $\displaystyle\sum_{\substack{(a,b) \in X^2 \\ a \neq b}} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = |X| \sum_{a \in X} \frac{1}{a}$

soit majoré par $\dfrac{cn}{\log\log n}$. Soit $B = \mathcal{E}_n \setminus A$; pour n grand, $|B| \geq \left(1 - \dfrac{c}{\log\log n}\right) n$ et si $k \in B$, $|\Omega(k) - \log\log n| < \dfrac{1}{2} \log\log n$.

Il en résulte que, pour tout $(k,l) \in B^2$, n grand :

$$|\underbrace{\Omega(kl)}_{\Omega(k)+\Omega(l)} - 2\log\log 2n| \leq |\log 2| + |\Omega(k) - \log\log n| + |\Omega(l) - \log\log n|$$

$$< \frac{3}{2} \log\log 2n$$

et de ce fait : $|\Omega(kl) - \log\log n| > \frac{1}{2} \log\log(2n)$.

i.e. : $kl \in \underbrace{\{m \in \mathcal{E}_{2n} \mid |\Omega(m) - \log\log 2n| > \frac{1}{2} \log\log 2n\}}_{C}$

et l'on sait que l'on peut trouver $D > 0$ tel que $|C| = O\left(\dfrac{n}{\log\log 2n}\right) \leq \dfrac{Dn}{\log\log n}$ (n grand)

Enfin, le nombre de produits $k.l$ où ($k \notin B$ ou $l \notin B$) est majoré par $\dfrac{C^2 n^2}{(\log\log n)^2} + \dfrac{2Cn^2}{\log\log n} = O\left(\dfrac{n^2}{\log\log n}\right)$

Finalement $|\{kl \mid (k,l) \in \mathcal{E}_n^2\}| = O\left(\dfrac{n^2}{\log\log n}\right)$ $\square$